第16講　置換積分法，部分積分法

PART1 置換積分法

要点整理と公式

要点① 置換積分法

$F(x)$ を $f(x)$ の原始関数，すなわち $F(x)=\int f(x)dx$ とする。ここで，x が t の関数として $x=g(t)$ と表されるとき，$F(x)=F(g(t))$ は t の関数として表される。よって，$F(x)$ を t で微分すると，合成関数の微分法により

$$\frac{d}{dt}F(x)=\frac{d}{dx}F(x)\cdot\frac{dx}{dt}$$
$$=f(x)g'(t)$$
$$=f(g(t))g'(t)$$

すなわち $\frac{d}{dt}F(x)=f(g(t))g'(t)$ より $F(x)=\int f(g(t))g'(t)dt$ と表される。

以上より，次の公式が成り立つ。

置換積分法①

$$\int f(x)dx=\int f(g(t))g'(t)dt \qquad ただし\ x=g(t)$$

この公式は $\int f(x)dx=\int f(g(t))\frac{dx}{dt}dt$ と書くことができる。

(ex) 不定積分 $\int x\sqrt{x+2}\,dx$ を求める。

$\sqrt{x+2}=t$ とおくと $x=t^2-2$ より $\frac{dx}{dt}=$

$$\int x\sqrt{x+2}\,dx=\int(t^2-2)t\cdot\quad dt=2\int(t^4-2t^2)dt$$
$$=2\left(\frac{1}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3\right)+C=\frac{2}{15}t^3(3t^2-10)+C$$
$$=\frac{2}{15}(3x-4)(x+2)\sqrt{x+2}+C$$

$x=g(t)$ のとき，$\dfrac{dx}{dt}=g'(t)$ である。$\dfrac{dx}{dt}=g'(t)$ を形式的に $dx=g'(t)dt$ と書くこととする。これにより $\displaystyle\int f(x)dx$ について，x を $g(t)$ に，dx を $g'(t)dt$ におき変えることで

$$\int f(x)dx=\int f(g(t))g'(t)dt$$

が得られる。

(ex) 不定積分 $\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{1-x}}dx$ を求める。

$\sqrt{1-x}=t$ とおくと $x=1-t^2$ より $\dfrac{dx}{dt}=-2t$ すなわち $dx=$

$$\int\frac{x}{\sqrt{1-x}}dx=\int\frac{1-t^2}{t}\cdot\qquad\qquad=2\int(t^2-1)dt$$

$$=2\left(\frac{1}{3}t^3-t\right)+C=\frac{2}{3}t(t^2-3)+C$$

$$=-\frac{2}{3}(x+2)\sqrt{1-x}+C$$

1 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int (x-2)\sqrt{x-3}\,dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{x}{(x-4)^2}\,dx$

Point Pickup

置換積分法①

$\displaystyle\int f(x)dx=\int f(g(t))g'(t)dt$ ただし $x=g(t)$

第16講 PART1 確認問題

次の不定積分を求めよ。

ただし，選択肢のあるものはその中から選べ。

また，C は積分定数とする。

1 $\displaystyle\int(5x+2)\sqrt{x+1}\,dx$

$\sqrt{x+1}=t$ とおくと，$x=t^2-1$

$$\int(5x+2)\sqrt{x+1}\,dx=\int\left(\boxed{アイ}t^4-\boxed{ウ}t^2\right)dt$$

$$=\boxed{エ}+C$$

[$\boxed{エ}$ の選択肢]

① $x(x+1)\sqrt{x+1}$　　② $2x(x+1)\sqrt{x+1}$

③ $(x+1)^2\sqrt{x+1}$　　④ $2(x^2-1)\sqrt{x+1}$

2 $\displaystyle\int\frac{x+1}{(x-2)^2}dx$

$x-2=t$ とおくと，$x=t+2$

$$\int\frac{x+1}{(x-2)^2}dx=\int\frac{t+\boxed{オ}}{t^2}dt$$

$$=\boxed{カ}+C$$

[$\boxed{カ}$ の選択肢]

① $\log|x|-\dfrac{3}{x}$　　② $\log|x-2|-\dfrac{1}{x-2}$

③ $\log|x-2|-\dfrac{3}{x-2}$　　④ $\log|x-2|-\dfrac{6}{(x-2)^3}$

第16講　置換積分法，部分積分法

PART1 置換積分法

1 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int (x-2)\sqrt{x-3}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{x}{(x-4)^2}dx$

[解答]

(1) $\sqrt{x-3}=t$ とおくと　$x=t^2+3$ より $dx=2tdt$

$$\int (x-2)\sqrt{x-3}\,dx=\int (t^2+1)t\cdot 2tdt=2\int (t^4+t^2)dt$$

$$=2\left(\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{3}t^3\right)+C=\frac{2}{15}t^3(3t^2+5)+C$$

$$=\frac{2}{15}(3x-4)(x-3)\sqrt{x-3}+C$$

(2) $x-4=t$ とおくと $x=t+4$ より $dx=dt$

$$\int \frac{x}{(x-4)^2}dx=\int \frac{t+4}{t^2}dt=\int \left(\frac{1}{t}+\frac{4}{t^2}\right)dt$$

$$=\log|t|-\frac{4}{t}+C$$

$$=\log|x-4|-\frac{4}{x-4}+C$$

第16講 PART1 確認問題 解答

1

[正解] アイ：10，ウ：6，エ：②

[解説]

$\sqrt{x+1}=t$ とおくと，$x+1=t^2$

$x=t^2-1$ より，$dx=2tdt$ [A]

$$\int(5x+2)\sqrt{x+1}\,dx=\int\{5(t^2-1)+2\}t\cdot 2tdt$$ [B]

$$=\int(10t^4-6t^2)dt$$

$$=2t^5-2t^3+C$$

$$=2t^3(t^2-1)+C$$

$$=2(\sqrt{x+1})^3\cdot x+C$$

$$=\boldsymbol{2x(x+1)\sqrt{x+1}+C}$$

[A]　$\sqrt{\ }$ の部分を t で置き換える。$x=g(t)$ と表され $\dfrac{dx}{dt}=g'(t)$ となる。

[B]　置換積分法①

$$\int f(x)dx=\int f(g(t))g'(t)dt$$

ただし，$x=g(t)$

2

[正解] オ：3，カ：③

[解説]

$x-2=t$ とおくと，$x=t+2$ より，

$$dx=dt$$

$$\int\frac{x+1}{(x-2)^2}dx=\int\frac{t+3}{t^2}dt$$ [C]

$$=\int\left(\frac{1}{t}+\frac{3}{t^2}\right)dt$$

$$=\log|t|-\frac{3}{t}+C$$

$$=\boldsymbol{\log|x-2|-\frac{3}{x-2}+C}$$

[C]　置換積分法①

$$\int f(x)dx=\int f(g(t))g'(t)dt$$

ただし，$x=g(t)$